ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4η ΔΕΚΑΔΑ

31.

Οι μηνιαίες αποδοχές , σε €, ν υπαλλήλων είναι $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ και αυτές αποτελούν ομοιογενές δείγμα με μέση τιμή 1000 € .
Αν το 48% έχει μισθό Α € , το 36% Β € και οι υπόλοιποι 4 Γ € :

i) Να βρείτε το μέγεθος του δείγματος
ii) Να δείξετε ότι 12Α + 9Β + 4Γ = 25000 €
iii) Να βρείτε την μέγιστη τιμή που μπορεί να έχει η τυπική απόκλιση
iv) Αν κάποιο μήνα οι μισθοί μειωθούν κατά 200 € , να βρείτε τη μέγιστη τιμή του νέου συντελεστή μεταβολής .

Προτεινόμενη λύση

i)
Οι τέσσερις υπάλληλοι με μισθό Γ € αντιστοιχούν στο 16% του δείγματος .
Αν λοιπόν ν είναι το μέγεθος του δείγματος , τότε $\frac{16}{100}\cdot \nu = 4 \Leftrightarrow \nu = 25$

ii)
$$\bar{x} = 0{,}48A + 0{,}36B + 0{,}16\Gamma \Leftrightarrow 1000 = 0{,}48A + 0{,}36B + 0{,}16\Gamma$$
$$100000 = 48A + 36B + 16\Gamma$$
$$12A + 9B + 4\Gamma = 25000$$

iii)
Το δείγμα είναι ομοιογενές $\Leftrightarrow CV \le 0{,}1$
$$\frac{S}{\bar{x}} \le 0{,}1$$
$$\frac{S}{1000} \le 0{,}1 \Leftrightarrow S \le 100$$
Οπότε $S_{max} = 100$

iv)
Αν y_i είναι οι νέοι μισθοί , τότε $y_i = x_i - 200$
$$\bar{y} = \bar{x} - 200 = 1000 - 200 = 800$$
και $S_y = S_x = S$

Οπότε $CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} \Leftrightarrow CV_y = \frac{S_y}{800} \Leftrightarrow S_y = 800\, CV_y$

Όμως $S \le 100$ άρα $800\, CV_y \le 100 \Rightarrow CV_y \le \frac{1}{8} \Rightarrow CV_{y\,max} = \frac{1}{8}$

32.

Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει βίδες των οποίων το μήκος ακολουθεί την κανονική κατανομή .

Υποθέτουμε ότι το 97,5% περίπου από τις βίδες έχει μήκος μεγαλύτερο από 4,6 cm ενώ το εύρος της κατανομής είναι 1,2cm .

i) Να βρείτε το μέσο μήκος των βιδών και την τυπική απόκλιση του μήκους

ii) Αν μία μέρα το εργοστάσιο φτιάχνει 20000 βίδες

  α) Να βρείτε πόσες βίδες έχουν μήκος από 4,8 έως 5,4 cm

  β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές .

iii) Αν μετά από καιρό το 0,3% των βιδών έχει μήκος μεγαλύτερο από 5,6 cm , να εξετάστε αν υπάρχει βλάβη στην μηχανή παραγωγής .

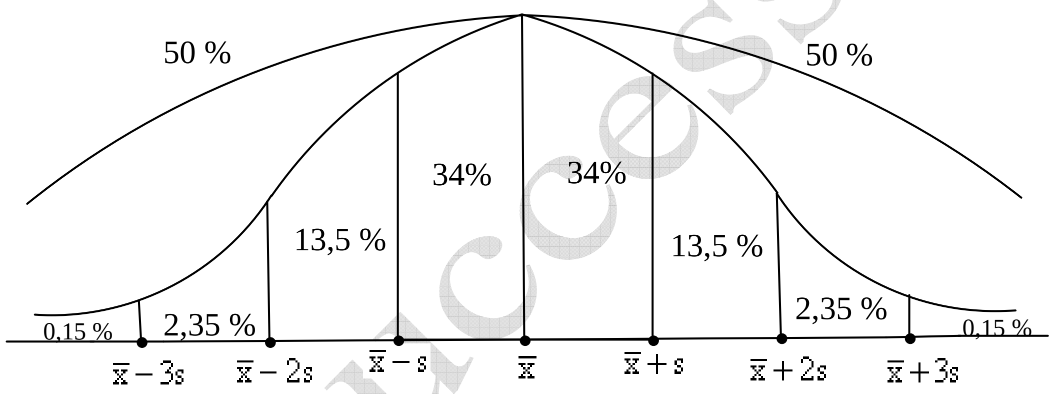
Προτεινόμενη λύση

i)

Από θεωρία γνωρίζουμε ότι στην κανονική κατανομή ισχύει

$R \approx 6S \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}2 = 6S \quad \Leftrightarrow \quad S = 0{,}2$ cm

Από την παρακάτω καμπύλη της κανονικής κατανομής



και τα σχετικά ποσοστά βλέπουμε ότι, το 97,5% των παρατηρήσεων έχει τιμή μεγαλύτερη από $\bar{x}-2S$, άρα $\bar{x}-2S = 4{,}6$

$$\bar{x}-0{,}4 = 4{,}6$$

$$\bar{x} = 5$$

ii)

α) Έχουμε $\bar{x}-S = 4{,}8$ και $\bar{x}+2S = 5{,}4$

Από τα ποσοστά της παραπάνω καμπύλης διαπιστώνουμε ότι στο διάστημα $(\bar{x}-S\ ,\ \bar{x}+2S)$ βρίσκεται το : 34% + 34% + 13,5% = 81,5%

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι ν = 20000

Οι βίδες με μήκος μεταξύ 4,8 και 5 ,4 είναι $\dfrac{81{,}5}{100}\cdot 20000 = 16300$

β) Εύκολα βρίσκουμε ότι CV = 4% , άρα το δείγμα είναι ομοιογενές

iii)

Μήκος μεγαλύτερο από 5,6 = $\bar{x}$ + 3S , καλώς εχόντων των πραγμάτων , αναμένεται να έχει το 0,15 % των βιδών , επειδή το ποσοστό είναι διπλάσιο κάποια βλάβη θα υπάρχει στην μηχανή παραγωγής .

33.

Έστω $\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$ ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \kappa x^2 + 4x + 2$ με $\kappa \in \Omega$.

Αν $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6)$, να βρείτε :

i) Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω

ii) Τις πιθανότητες των ενδεχομένων : Α "η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος"
Β "η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός"

iii) Την πιθανότητα του ενδεχομένου "η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο R"

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6) = \mu$ τότε

$P(1) = P(3) = P(5) = \mu$ και $P(2) = \frac{\mu}{2}$, $P(4) = \frac{\mu}{4}$, $P(6) = \frac{\mu}{2}$

Όμως $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Leftrightarrow$

$$\mu + \frac{\mu}{2} + \mu + \frac{\mu}{4} + \mu + \frac{\mu}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{4}{17}$$

Άρα $P(1) = P(3) = P(5) = \frac{4}{17}$, $P(2) = P(6) = \frac{2}{17}$ και $P(4) = \frac{1}{17}$

ii)

$A = \{2, 4, 6\}$ οπότε $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{17} + \frac{1}{17} + \frac{2}{17} = \frac{5}{17}$

$B = \{ 1, 3, 5\}$ οπότε $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{17} = \frac{12}{17}$

iii)

$f\,'(x) = x^2 - 2\kappa\, x + 4$

$\Delta = 4\kappa^2 - 16$

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow \kappa > 2$ (εφόσον $\kappa \in \Omega$)
  Τότε η $f\,'$ έχει δύο ρίζες άνισες και δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$
  Η $f\,'$ έχει διπλή ρίζα το 2

  Πρόσημο της $f\,'$ και μονοτονία της f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f΄	+	0	+
f	↗		↗

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι, για $\kappa = 2$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Αν $\Delta < 0 \iff 1 \le \kappa < 2$ (εφόσον $\kappa \in \Omega$), τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
  Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Έστω Η το ενδεχόμενο "η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$", τότε $H = \{1, 2\}$

οπότε $P(H) = P(1) + P(2) = \dfrac{4}{17} + \dfrac{2}{17} = \dfrac{6}{17}$

34.

Σ' ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x + 4)^2$ κορίτσια .
Επιλέγουμε ένα άτομο να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μία εκδήλωση.

i) Να εκφράσετε, σαν συνάρτηση του x, την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι

ii) Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\dfrac{1}{19}$ και ο όμιλος έχει λιγότερα από 100 μέλη , να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου , καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι .

iii) Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι και πόση είναι η πιθανότητα αυτή; (θεωρήστε σ΄ αυτή την περίπτωση ότι $x > 0$)

Προτεινόμενη λύση

i)

Το πλήθος των ατόμων του ομίλου είναι $x + (x + 4)^2$
Το πλήθος των αγοριών του ομίλου είναι x

Η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι $P(x) = \dfrac{x}{x + (x+4)^2} = \dfrac{x}{x^2 + 9x + 16}$

ii)

$$P(x) = \frac{1}{19} \iff \frac{x}{x^2+9x+16} = \frac{1}{19}$$
$$x^2 + 9x + 16 = 19x$$
$$x^2 - 10x + 16 = 0 \iff x = 2 \ \text{ή} \ x = 8$$

- Αν τα αγόρια είναι $x = 8$, τότε τα κορίτσια είναι $(8 + 4)^2 = 144$, πράγμα αδύνατο αφού ο όμιλος έχει λιγότερα από 100 μέλη
- Αν τα αγόρια είναι $x = 2$, τότε τα κορίτσια είναι $(2 + 4)^2 = 36$

Επομένως ο όμιλος έχει $2 + 36 = 38$ άτομα

Η πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι είναι $P(K) = \dfrac{36}{38} = \dfrac{18}{19}$

iii)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9x+16}$, $x \in N^*$

$$f'(x) = \frac{x^2+9x+16-2x^2-9x}{(x^2+9x+16)^2} = \frac{-x^2+16}{(x^2+9x+16)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff -x^2 + 16 = 0 \iff x = 4$$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f :

x	0		4		$+\infty$
f΄		+	0	−	
f		↗		↘	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο , το $f(4) = \frac{4}{68}$

Επομένως η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι μεγιστοποιείται όταν x = 4 και η μέγιστη τιμή της είναι $P(4) = \frac{4}{68}$.

35.

Στο διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή των σχετικών συχνοτήτων της βαθμολογίας ν μαθητών

[,)	f_i
12-14	0,1
14-16	0,3
16-18	x
18-20	f_4

i) Να εκφράσετε την σχετική συχνότητα f_4 σαν συνάρτηση του x

ii) Να δείξετε ότι η παράσταση $f_3 \cdot f_4^2$ έχει μέγιστη τιμή ίση με 0,032

iii) Αν $f_3 = 0,4$, να βρείτε το $\bar{x}$

iv) Εκλέγοντας έναν από τους παραπάνω μαθητές στην τύχη , να βρείτε την πιθανότητα αυτός να έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από 16.

Προτεινόμενη λύση

i)

$0,1 + 0,3 + x + f_4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f_4 = 0,6 - x$

Αλλά $f_4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0,6 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 0,6 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 0,6$

Άρα $f_4(x) = 0,6 - x , \quad 0 \leq x \leq 0,6$

ii)

$f_3 \cdot f_4^2 = x(0,6-x)^2 = x^3 - 1,2x^2 + 0,36x$

Έστω $h(x) = x^3 - 1,2x^2 + 0,36x , \quad 0 \leq x \leq 0,6$

$h΄(x) = 3x^2 - 2,4x + 0,36$

$h΄(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 2,4x + 0,36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,4$ ή $x = 0,2$

Πρόσημο της h΄ και μονοτονία της h :

x	0		0,2		0, 4		0,6
h΄		+	0	−	0	+	
h		↗		↘		↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η h παρουσιάζει

τ. ελάχιστο στο x = 0 , το h(0) = 0

τ. μέγιστο στο x = 0, 2 , το h(0,2) = 0,032

τ. ελάχιστο στο x = 0,4 , το h(0,4) = 0,016 τ. μέγιστο στο $x = 0,6$ το $h(0,6) = 0$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η μέγιστη τιμή της h είναι η 0,032

iii)

Αν $f_3 = 0,4$ τότε $f_4 = 0,2$, οπότε $\overline{x} = x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4$

$= 13\cdot 0,1+15\cdot 0,3+17\cdot 0,4+19\cdot 0,2 = 16,4$

iv)

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $f_3 + f_4 = 0,4 + 0,2 = 0,6 = 60\%$

36.

Μια τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της . Αν επιλέξουμε τυχαία έναν πελάτη , τότε η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό είναι 0,7 , ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα προηγούμενα δάνεια είναι 0,1 .

i) Να βρείτε την πιθανότητα: ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια και να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα "έχει πάρει καταναλωτικό" και "έχει πάρει στεγαστικό" είναι ασυμβίβαστα

ii) Αν επιπλέον, η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 , να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχόμενων

α) έχει πάρει καταναλωτικό

β) έχει πάρει μόνο καταναλωτικό .

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω Κ το ενδεχόμενο "έχει πάρει καταναλωτικό"

και Σ το ενδεχόμενο "έχει πάρει στεγαστικό"

Τότε $P[(K-\Sigma)\cup(\Sigma-K)] = 0{,}7$ **(1)** και $P(K\cup\Sigma)' = 0{,}1$ **(2)**

$(K\cap\Sigma)$ είναι το ενδεχόμενο " ο πελάτης έχει πάρει και τα δύο δάνεια "

$(1) \Rightarrow P(K) + P(\Sigma) - 2P(K\cap\Sigma) = 0{,}7$ **(3)**

$(2) \Rightarrow 1 - P(K\cup\Sigma) = 0{,}1$

$P(K\cup\Sigma) = 0{,}9$

$P(K) + P(\Sigma) - P(K\cap\Sigma) = 0{,}9$ **(4)**

$(4)-(3) \Rightarrow P(K\cap\Sigma) = 0{,}2$

Επειδή $P(K\cap\Sigma) = 0{,}2 \neq 0 \Rightarrow K\cap\Sigma \neq \varnothing$

Άρα τα ενδεχόμενα "έχει πάρει καταναλωτικό" και "έχει πάρει στεγαστικό" δεν είναι ασυμβίβαστα

ii)

$P(\Sigma-K) = 0{,}6 \Rightarrow P(\Sigma) - P(\Sigma\cap K) = 0{,}6$

α) Η (4) $\Rightarrow P(K) + 0{,}6 = 0{,}9 \Rightarrow P(K) = 0{,}3$

β) $P(K-\Sigma) = P(K) - P(K\cap\Sigma) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$

37.

Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$, και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(x - P(A)\right) - \frac{1}{2}\left(x - P(A)\right)^2 + P(B) \quad , x > P(A)$$

A.

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

ii) Αν η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_o = \frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_o) = 0$,

να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) = \frac{1}{2}$

iii) Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$ και $P(B)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(\frac{5}{3}, f\left(\frac{5}{3}\right)\right)$

B.

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα (ii) και επιπλέον ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ να βρείτε την πιθανότητα

i) Να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A και B

ii) Να πραγματοποιηθεί ένα μόνο από τα A και B

Προτεινόμενη λύση

A . i)

$$f'(x) = \frac{1}{x - P(A)} - (x - P(A)) = \frac{1 - (x - P(A))^2}{x - P(A)}$$

$f'(x) = 0 \iff 1 - (x - P(A))^2 = 0$

$(x - P(A))^2 = 1$

$x - P(A) = 1$ ή $x - P(A) = -1$

$x = 1 + P(A)$ ή $x = P(A) - 1 < P(A)$ απορρίπτεται (αρνητική)

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	P(A)		1 + P(A)		$+\infty$
f′		+	0	−	
f		↗		↘	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο

για $x = 1 + P(A)$, το $f(1 + P(A)) = -\frac{1}{2} + P(B)$

A. ii)

Από υπόθεση έχουμε $1 + P(A) = \frac{5}{3}$ και $-\frac{1}{2} + P(B) = 0 \Leftrightarrow$

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

A. iii)

Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$ και $P(B)$, η συνάρτηση γίνεται

$$f(x) = \ln\left(x-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$f\,'(x) = \frac{1}{x-\frac{2}{3}} - \left(x-\frac{2}{3}\right) = \frac{1-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{x-\frac{2}{3}}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο Α είναι $y - f\left(\frac{5}{3}\right) = f\,'\left(\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)$ **(1)**

Αλλά $f\left(\frac{5}{3}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} = \ln 1 - \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

και $f\,'\left(\frac{5}{3}\right) = \dfrac{1-\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}} = \dfrac{1-1}{1} = 0$

Η (1) γίνεται $y = 0$

B. i)

$P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$

$= 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$

B. ii)

Είναι $P(A \cap B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Οπότε $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

38.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \nu^3 x + \dfrac{4}{x^2}$, $x \in (0\,,\,1)$ όπου ν ακέραιος με $\nu > 2$

Α.

i) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία

ii) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τα ακρότατα και να δειχθεί ότι $f(x) \ \geq\ 3\nu^2$ για κάθε $x \in (0\,,\,1)$

Β.

Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1,\ 2,\ 3, \ldots, \nu\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενό του Α , για το οποίο ισχύει $\nu^3 P(A) + \dfrac{4}{(P(A))^2} = 3\nu^2$ και $N(A) = \nu^2 - 9\nu - 8$, όπου $P(A)$ η πιθανότητα του Α και $N(A)$ το πλήθος των στοιχείων του Α .

i) Να δείξετε ότι $P(A) = \dfrac{1}{5}$

ii) Αν επί πλέον Β είναι ένα ενδεχόμενο του Ω με $P(A \cup B) = \dfrac{3}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B'$

Προτεινόμενη λύση

Α. i)

$$f\,'(x) = \nu^3 - \frac{8}{x^3} = \frac{\nu^3 x^3 - 8}{x^3}$$

$$f\,'(x) = 0 \iff \nu^3 x^3 - 8 = 0 \iff x^3 = \frac{8}{\nu^3} \iff x = \frac{2}{\nu}$$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	0		2/ν		1
f΄		–	0	+	
f		↘	|	↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \dfrac{2}{\nu}$,

$$\text{το } f\left(\frac{2}{\nu}\right) = \nu^3 \cdot \frac{2}{\nu} + 4\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 = 2\,\nu^2 + \nu^2 = 3\nu^2 .$$

Α. ii)

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι , για κάθε $x \in (0\,,\,1)$ είναι $f(x) \geq 3\nu^2$.

Β. i)

$$\nu^3 P(A) + \frac{4}{(P(A))^2} = 3\nu^2 \quad \Rightarrow \quad f\,(P(A)) = 3\nu^2$$

$$P(A) = \frac{2}{\nu}$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{\nu}$$

$$\frac{\nu^2 - 9\nu - 8}{\nu} = \frac{2}{\nu}$$

$$\nu^2 - 9\nu - 10 = 0$$

$\nu = 10$ ή $\nu = -1$ απορρίπτεται

Οπότε $P(A) = \frac{2}{\nu} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

B. ii)

$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') =$

$= P(A) + P(B') - [P(A) - P(A \cap B)] =$

$= P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) =$

$= 1 - P(B) + P(A \cap B)$ **(1)**

Όμως $P(A \cup B) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{5} + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4}$$

$$P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{5}$$

$$P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{20}$$

Η (1) γίνεται $P(A \cup B') = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$

39.

Έστω ένας δειγματικός χώρος Ω με $N(\Omega) = 15000$ και ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα . Αν A και A' αντίθετα ενδεχόμενα του Ω με $0 < P(A) < 1$,

δείξτε ότι : **i)** $4\dfrac{P(A)}{P(A')} + \dfrac{1}{P(A)} \geq 5$

ii) Αν η παραπάνω σχέση ισχύει με το ίσον, τότε να βρείτε το $N(A)$

iii) Αν κάποιο ενδεχόμενο B του Ω έχει 10001 στοιχεία, δείξτε ότι $A \cap B \neq \varnothing$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$4\frac{P(A)}{P(A')} + \frac{1}{P(A)} \geq 5 \Leftrightarrow 4(P(A))^2 + P(A') \geq 5\,P(A)P(A')$$

$$4(P(A))^2 + 1 - P(A) \geq 5\,P(A)(1 - P(A))$$

$$4(P(A))^2 + 1 - P(A) - 5\,P(A) + 5\,(P(A))^2 \geq 0$$

$$9(P(A))^2 + 1 - 6\,P(A) \geq 0$$

$$[3P(A) - 1]^2 \geq 0$$ η οποία είναι προφανής

ii)

$$[3P(A) - 1]^2 = 0 \Leftrightarrow 3P(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{N(A)}{15000} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow N(A) = 5000$$

iii)

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{10001}{15000}$$

Έστω ότι είναι $A \cap B = \varnothing$, τότε $P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{5000}{15000} + \frac{10001}{15000} = \frac{15001}{15000} > 1$$

που είναι άτοπο

Άρα $A \cap B \neq \varnothing$.

40 .

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = \sqrt{x+2} - 2$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

iii) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

iv) Να βρείτε σημείο της C_g, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $2y - \sqrt{2}\,x + 1 = 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

$A_f = \mathbb{R}$, $A_g = [-2, +\infty)$

Για το A_g : Πρέπει $x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$

Για το $A_{\frac{g}{f}}$: Πρέπει $x + 2 \geq 0$ και $f(x) \neq 0 \iff$

$$x \geq -2 \quad \text{και} \quad x^2 - 5x + 6 \neq 0$$

$$x \geq -2 \quad \text{και} \quad x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq 3$$

Άρα $A_{\frac{g}{f}} = [-2, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

ii)

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-5x+6}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x^2-5x+6)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-3)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-3)(\sqrt{x+2}+2)} = -\frac{1}{4}$$

iii)

Η εφαπτομένη στο $A(\alpha, f(\alpha))$ έχει εξίσωση $y - f(\alpha) = f\,'(\alpha)(x - \alpha)$ **(1)**

$f(\alpha) = \alpha^2 - 5\alpha + 6$, $f\,'(x) = 2x - 5$, $f\,'(\alpha) = 2\alpha - 5$

Η (1) γίνεται $y - (\alpha^2 - 5\alpha + 6) = (2\alpha - 5)(x - \alpha)$

$$y = (2\alpha - 5)\,x - \alpha^2 + 6$$

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, πρέπει $0 = (2\alpha - 5)\,0 - \alpha^2 + 6$

$$0 = -\alpha^2 + 6$$

$$\alpha = \sqrt{6} \quad ή \quad \alpha = -\sqrt{6}$$

iv)

$2y - \sqrt{2}\,x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{1}{2}$ με $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Αν (x , g(x)) είναι το ζητούμενο, σημείο τότε πρέπει $g'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2} = 1$$

$$2(x+2) = 1$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι $B\left(-\dfrac{3}{2},\ g\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right)$

Αλλά $g\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \sqrt{-\dfrac{3}{2}+2} - 2 = \sqrt{\dfrac{1}{2}} - 2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2 = \dfrac{\sqrt{2}-4}{2}$

Άρα $B\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}-4}{2}\right)$